数学教学中的逐步分解法：矩阵的初等变换与元素析取[1]

刘雨喆[2, i]

i. 贵州大学数学与统计学院, 贵州贵阳, 550025,
E-mail: yzliu3@163.com, liuyz@gzu.edu.cn.

摘要. 逐步分解法（SDM = Stepwise Decomposition Method）指的是通过将一个宏观整体的对象分解为一些单一对象，并通过这些单一对象来描述宏观整体的对象。这一思想广泛分布在生活、科技、研究等方方面面。本文以《高等代数》中矩阵的初等变换的教学为例，对数学教学中的逐步分解法展开一些论述。

关键词. 《高等代数》教学研究；逐步分解法；初等矩阵。

中图分类号. O151.2

引 言

当一个复杂的对象需要被讨论（或者一个复杂事件的对策需要被提出时），我们往往需要先将对象（或者事件）逐级分解为若干单一的对象或者事件，然后通过对每个对象（或者事件）进行讨论（或给出相应对策），进而得到整个复杂对象的性质（或者整个复杂事件的对策）。在《高等代数》教学中，初等变换是对矩阵或者行列式进行研究的经典手法。以矩阵为例，判断一个矩阵 $\mathbf{A}$ 是否可逆，可以通过对其进行初等变换以获得矩阵的秩或者其相抵标准型，然后利用秩或者其相抵标准型进行判断。每一步初等变换可以等效地看成对矩阵左乘或者右乘一个初等矩阵，这使得初等变换本质上也是将矩阵 $\mathbf{A}$ 分解为若干初等矩阵的乘积。

本文以教材[1, 第二章, 第 2.8 节]的教学为例，利用矩阵的“元素析取”来对矩阵的初等变换进行进一步分解，给出一种对矩阵的初等变换的更细致的理解方式，并将其在《高等代数》教学中加以应用。

1 矩阵的元素析取

方便起见，本文始终假设 $\mathbb{F}$ 是包含至少两个元素的域，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵（对于非方阵的情形，方法类似），记号 $\mathbf{E}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1 且其余元素为 0 的 n 阶矩阵。矩阵的“元素析取”指的是通过数学表达式来获取给定矩阵的某些元素。关于“元素析取”，有如下三个基本事实：

事实 1 $\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}=(x_{ij})_{n\times n}$，其中，当 $i=r$ 时，$x_{ij}=x_{rj}=a_{ij}=a_{rj}$（$1\le j\le n$）；对其它情形，$x_{ij}=0$。等价地说，$\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}$ “析取”了矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 r 行元素。

事实 2 $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ss}=(y_{ij})_{n\times n}$，其中，当 $j=s$ 时，$y_{ij}=y_{is}=a_{ij}=a_{is}$（$1\le i\le n$）；对其它情形，$y_{ij}=0$。等价地说，$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ss}$ “析取”了矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 s 列元素。

事实 3 $\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}\mathbf{E}_{ss}=a_{rs}\mathbf{E}_{rs}$。等价地说，$\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}\mathbf{E}_{ss}$ “析取”了矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 r 行第 s 列的元素 a_{rs}。

[1] 本文由贵州省科技厅科学计划项目(合同号：黔科合基础-ZK[2024]一般 066), 贵州大学引进人才科研启动基金项目 (合同号：贵大人基合字(2023)16 号, (2022) 53 号, (2022) 65 号), 贵州大学高等教育研究项目(项目申请号：703217243301)资助。

[2] 作者简介：刘雨喆 (1992.03-), 土家族, 男, 南京大学博士, 贵州大学数学与统计学院讲师/校聘副教授, 硕士生导师, 主要研究方向: 同调代数与代数表示论。E-mail: yzliu3@163.com。

事实 1 和**事实 2** 可以通过矩阵的乘法证明，**事实 3** 是**事实 1** 和**事实 2** 的直接推论。

关于矩阵的“元素析取”的讲解，一个值得声明的事实是它对于刚步入大学的大一本科生而言并非是一个陌生概念，笔者认为“元素析取”的讲解可以结合高中数学教学中的向量内积来进行。一般地，任意给定 3 维实空间$\mathbb{R}^3$的向量$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}$ 在$\mathbb{R}^3$的标准正交基$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$下的坐标可以表述为

$$\boldsymbol{v}=(\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{i}\rangle,\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{j}\rangle,\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{k}\rangle),$$

其中，记号$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示对向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$求内积。注意公式$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$（$\theta$表示向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$的夹角）给出了内积的几何意义，即向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影，当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}$且$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}$时，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{i}\rangle$的几何意义蕴含了“析取向量$\boldsymbol{v}$的第 1 分量”的代数意义。类似地，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{j}\rangle$和$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{k}\rangle$“分别析取向量$\boldsymbol{v}$的第 2 和第 3 分量”。

2　矩阵的初等变换在元素析取角度下的解释

接下来，本文给出矩阵的三类初等变换的逐步分解后的代数计算步骤。

2.1 换行（列）变换在元素析取角度下的解释

换行（列）变换，也称为矩阵的第一类初等变换，指的是在给定的矩阵$\mathbf{A}$上交换其两行（列）。本文以初等行变换为例，交换矩阵$\mathbf{A}$的第r行和第s行可以被拆为如下三个步骤（**例 1** 提供了一个$\mathbf{A}$是 4 阶方阵并且$r=1<s=3$的算例）：

步骤 1. “析取”$\mathbf{A}$的第r行和第s行元素，用矩阵语言表述，即计算$\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$和$\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}$。

步骤 2. 将$\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$的第$r$行移动到$\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$的第$s$行，用矩阵语言表述，即计算$\mathbf{E}_{sr}\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$；同时，也将$\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}$的第$s$行移动到$\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$的第$r$行，用矩阵语言表述，即计算$\mathbf{E}_{rs}\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}$。

步骤 3. $\sum\limits_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne r,s}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}$表示$\mathbf{A}$被“析取”第$r$行和第$s$行的元素之后剩下的部分，将$\mathbf{E}_{sr}\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}$和$\mathbf{E}_{rs}\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}$加到此剩下部分后，则得

$$\mathbf{E}_{sr}\mathbf{E}_{rr}\mathbf{A}+\mathbf{E}_{rs}\mathbf{E}_{ss}\mathbf{A}+\sum_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne r,s}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}=\mathbf{E}_{r\leftrightarrow s}\mathbf{A} \tag{1}$$

(其中，$\mathbf{E}_{r\leftrightarrow s}=\mathbf{E}_{sr}+\mathbf{E}_{rs}+\sum\limits_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne r,s}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}$)。

例 1. 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{pmatrix}$。下面给出交换$\mathbf{A}$的第 1 行和第 3 行的逐步分解教学算例。

首先，析取第 1 行和第 3 行：

$$\mathbf{E}_{11}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\c_1&c_2&c_3&c_4\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

其次，移动$\mathbf{E}_{11}\mathbf{A}$的第 1 行到第 3 行，并移动$\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$的第 3 行到第 1 行：

$$\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{11}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\1&&0&\\&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\a_1&a_2&a_3&a_4\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&&1&\\&0&&\\0&&0&\\&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\c_1&c_2&c_3&c_4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3&c_4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

最后，再将$\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{11}\mathbf{A}(=\mathbf{E}_{31}\mathbf{A})$和$\mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}(=\mathbf{E}_{13}\mathbf{A})$加到矩阵$\sum\limits_{\substack{1\le t\le 4\\ t\ne r,s}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\b_1&b_2&b_3&b_4\\0&0&0&0\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$上，就得到

$$\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}+\sum_{\substack{1\le t\le 4\\ t\ne r,s}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3&c_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\a_1&a_2&a_3&a_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\mathbf{E}_{1\leftrightarrow 3}\mathbf{A},$$

它就是交换$\mathbf{A}$的第 1 行和第 3 行的元素后，得到的矩阵。

2.2 倍法变换在元素析取角度下的解释

倍法变换也叫做矩阵的第二类初等变换，它指的是将给定矩阵的某一行乘以一个非零常数c。对倍法变换的逐步分解如下。

步骤 1. “析取”$\mathbf{A}$的第i行元素，即，计算$\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$。

步骤 2. 将$\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$中的所有元素乘以$c\ne 0$，即，计算$c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$。

步骤 3. $\sum\limits_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne i}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}$表示$\mathbf{A}$被“析取”第$r$行的元素之后剩下的部分，将$c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$加到此剩余部分后，得

$$c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}+\sum_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne i}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}=\mathbf{E}_{c\cdot \mathrm{r}_i}\mathbf{A} \tag{2}$$

$$(\text{其中，}\ \mathbf{E}_{c\cdot \mathrm{r}_i}=c\mathbf{E}_{ii}+\sum_{\substack{1\le t\le n\\ t\ne i}}\mathbf{E}_{tt}\ )。$$

例 2. 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$。下面给出将$\mathbf{A}$的第 3 行乘以常数$c\ne 0$的逐步分解教学算例。

首先，“析取”矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 3 行元素 $\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$（计算过程见**例 1**）。其次，计算 $c\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$，它将 $\mathbf{A}$ 的第 3 行的所有元素 $\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$ 都乘以了 c。最后，

$$c\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}+\sum_{\substack{1\le t\le 4\\ t\ne 3}}\mathbf{E}_{tt}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\cc_1&cc_2&cc_3&cc_4\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\0&0&0&0\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\mathbf{E}_{c\cdot\mathrm{r}_3}\mathbf{A}$$

给出了对矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 3 行实施倍法变换后的矩阵。

2.3 消法变换在元素析取角度下的解释

消法变换也叫做矩阵的第三类初等变换，它指的是将给定矩阵的某一行（列）的 c 倍加到另一行（列）上。消法变换的目的是为了保持矩阵某些的性质不变（例如方阵的行列式不变）的情形下，将矩阵在相抵等价关系的意义下等价到另一个零元素更多的矩阵，后者在计算上处理起来更加简便。对倍法变换的逐步分解如下。

步骤 1. “析取” $\mathbf{A}$ 的第 i 行元素，即，计算 $\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$。

步骤 2. 将 $\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$ 中的所有元素乘以 $c\ne 0$，并移动到第 j 行（$i\ne j$），即，计算 $\mathbf{E}_{ji}\cdot c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$。

步骤 3. 将 $\mathbf{E}_{ji}\cdot c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}$ 直接加到 $\mathbf{A}$ 上，得

$$\mathbf{E}_{ji}\cdot c\mathbf{E}_{ii}\mathbf{A}+\mathbf{A}=\mathbf{E}_{c\cdot\mathrm{r}_i+\mathrm{r}_j}\mathbf{A} \tag{3}$$

(其中，$\mathbf{E}_{c\cdot\mathrm{r}_i+\mathrm{r}_j}=\mathbf{E}_{ji}\cdot c\mathbf{E}_{ii}+\mathbf{E}=c\mathbf{E}_{ji}+\mathbf{E}$)

例 3. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$。下面给出将 $\mathbf{A}$ 的第 3 行的 $c\ne 0$ 倍加到第 1 行的倍法变换的逐步分解教学算例。

首先，“析取”矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 3 行元素 $\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$（计算过程见**例 1**）。其次，计算 $\mathbf{E}_{13}\cdot c\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}$，得

$$\mathbf{E}_{13}\cdot c\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}=c\mathbf{E}_{13}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}cc_1&cc_2&cc_3&cc_4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

最后，将它直接加到矩阵 $\mathbf{A}$ 上，就得到

$$\mathbf{E}_{13}\cdot c\mathbf{E}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}cc_1+a_1&cc_2+a_2&cc_3+a_3&cc_4+a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\mathbf{E}_{c\cdot\mathrm{r}_3+\mathrm{r}_1}\mathbf{A}。$$

这就给出了对矩阵 $\mathbf{A}$ 实施消法变换后的矩阵。

公式(1)，(2), 和(3)中的矩阵 $\mathbf{E}_{r\leftrightarrow s}$， $\mathbf{E}_{c\cdot \mathrm{r}_i}$ 和 $\mathbf{E}_{c\cdot \mathrm{r}_i+\mathrm{r}_j}$ 就称为（三类初等行变换对应的）初等矩阵。一定程度上，本文解释了初等矩阵的由来。

3 总结

逐步分解的思想是教学和科研中最基本的方法之一。《高等代数》作为刚步入大学的一年级本科生首次接触抽象数学课程，一直是教学和学习的难点。本文以教材[1, 第二章, 第 2.8 节]中矩阵的初等变换教学为例，将逐步分解教学方法应用到高等代数教学中，在一定程度上让本科生理解了初等矩阵的由来，而非生搬硬套地让学生去对“乘以初等矩阵等价于矩阵的初等变换”直接理解。认为这一教学方法也可以对于其余《高等代数》教材或《线性代数》教材的课堂教学使用，例如[2, 3 等]。笔者也是首次将这一教学方法以非常详细地应用于课堂教学之中，并在教学过程中强调“元素析取”的数学表达方式，因此未免在某些地方难免会稍欠考虑。但是，笔者相信逐步分解的思想一定能够取得一定的教学成果。

参考文献

1. 徐云阁, 章超, 廖军. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, (2021). ISBN: 978-7-03-069290-0.
2. 同济大学应用数学系. 高等代数与解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, (2016). ISBN: 978-7-04-044061-4.
3. 张良云. 线性代数（第二版）[M]. 北京: 高等教育出版社, (2003). ISBN: 978-7-04-011890-2.